

NO.

0117

極座標変換と球座標変換のヤコビ行列式

座標変換 $(x, y) \rightarrow (u, v)$ (あるいは3変数の場合はこれに準ずる) に対するヤコビ行列式は

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

で定義され、重積分の変数変換公式

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

に用いられる。極座標変換 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ および球座標変換 $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$ について、それぞれのヤコビ行列式 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ および $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)}$ を、導出過程を示して求めよ。

解答欄