

解答 0001 放物線と直線で囲まれた面積

1. 共有点は $x^2 = x + 2$ の解に対応する。

$$x^2 - x - 2 = 0 \iff (x+1)(x-2) = 0 \iff x = -1, 2$$

それぞれ ℓ (または C) に代入して

$$x = -1 \implies y = 1, \quad x = 2 \implies y = 4$$

したがって共有点は $(-1, 1)$ 、 $(2, 4)$ である。

2. $-1 \leq x \leq 2$ の範囲では $x+2 \geq x^2$ (区間の内部で $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) \leq 0$ となることから確認できる) ので、 ℓ が C の上側にある。よって

$$S = \int_{-1}^2 \{(x+2) - x^2\} dx = \int_{-1}^2 \{-(x+1)(x-2)\} dx.$$

$\int_{\alpha}^{\beta} -(x-\alpha)(x-\beta) dx = \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$ の公式 ($\alpha = -1, \beta = 2$) を用いると

$$S = \frac{(2 - (-1))^3}{6} = \frac{3^3}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$

検算 (公式を使わず直接計算する) :

$$\int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2.$$

$$x = 2 \text{ のとき } -\frac{8}{3} + 2 + 4 = -\frac{8}{3} + 6 = \frac{10}{3}.$$

$$x = -1 \text{ のとき } -\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{12}{6} = -\frac{7}{6}.$$

よって

$$S = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{20}{6} + \frac{7}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$

公式を用いた結果と一致するので、 $S = \frac{9}{2}$ である。