

NO.

0002

ベルヌーイ型微分方程式の一般解 ($1/x^m$ の形)

この方程式は $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ の形 (ベルヌーイ型) であり、 $u = y^{1-n}$ の置換により線形方程式に帰着できる。

$n = 2$ のベルヌーイ型。両辺を y^2 で割ると

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y^{-1} = x$$

$u = y^{-1}$ とおくと $\frac{du}{dx} = -y^{-2} \frac{dy}{dx}$ より

$$-\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = x \iff \frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = -x$$

積分因子は $\mu = \exp\left(-\int \frac{dx}{x}\right) = \frac{1}{x}$ であるから

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{x} \right) = -1 \implies \frac{u}{x} = -x + C \implies u = Cx - x^2$$

$u = y^{-1}$ を戻して

$$y = \frac{1}{Cx - x^2} \quad (C \text{ は任意定数})$$