

NO.

0003

ベルヌーイ型微分方程式の一般解（ $n = 3$ 、指数関数係数）

この方程式は $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ の形（ベルヌーイ型）であり、 $u = y^{1-n}$ の置換により線形方程式に帰着できる。

$n = 3$ のベルヌーイ型。両辺を y^3 で割ると

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} - y^{-2} = e^x$$

$u = y^{-2}$ とおくと $\frac{du}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx}$ より

$$-\frac{1}{2} \frac{du}{dx} - u = e^x \iff \frac{du}{dx} + 2u = -2e^x$$

積分因子は $\mu = e^{2x}$ であるから

$$\frac{d}{dx} (u e^{2x}) = -2e^{3x} \implies u e^{2x} = -\frac{2}{3} e^{3x} + C \implies u = C e^{-2x} - \frac{2}{3} e^x$$

$u = y^{-2}$ を戻して

$$\boxed{\frac{1}{y^2} = C e^{-2x} - \frac{2}{3} e^x} \quad (C \text{ は任意定数})$$