

NO.

0004

初期条件付きベルヌーイ型微分方程式

この方程式は $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ の形（ベルヌーイ型）であり、 $u = y^{1-n}$ の置換により線形方程式に帰着できる。

$n = 2$ のベルヌーイ型。両辺を y^2 で割り、 $u = y^{-1}$ ($\frac{du}{dx} = -y^{-2} \frac{dy}{dx}$) とおくと

$$-\frac{du}{dx} + 2xu = x \iff \frac{du}{dx} - 2xu = -x$$

積分因子は $\mu = e^{-x^2}$ であるから

$$\frac{d}{dx} \left(u e^{-x^2} \right) = -x e^{-x^2} \implies u e^{-x^2} = \frac{1}{2} e^{-x^2} + C \implies u = \frac{1}{2} + C e^{x^2}$$

初期条件 $y(0) = 1$ より $u(0) = 1$ であるから $C = \frac{1}{2}$ 。よって

$$u = \frac{1 + e^{x^2}}{2} \implies \boxed{y = \frac{2}{1 + e^{x^2}}}$$