

NO.

0005

リカッチ方程式の一般解（特解 $y_1 = x$ ）

リカッチ方程式は特解 y_1 が 1 つ分かれば、 $y = y_1 + \frac{1}{u}$ の置換により u についての 1 階線形方程式に変換できる。

$y_1 = x$ を代入すると、左辺 = 1、右辺 = $1 + x^2 - 2x^2 + x^2 = 1$ となり一致するので、 $y_1 = x$ は特解である。
 $y = x + \frac{1}{u}$ とおくと $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{u'}{u^2}$ 。方程式に代入して

$$1 - \frac{u'}{u^2} = 1 + x^2 - 2x \left(x + \frac{1}{u} \right) + \left(x + \frac{1}{u} \right)^2 = 1 + \frac{1}{u^2}$$

$(x^2 - 2x^2 - \frac{2x}{u} + x^2 + \frac{2x}{u} = 0$ に注意。) よって

$$-\frac{u'}{u^2} = \frac{1}{u^2} \iff \frac{du}{dx} = -1 \implies u = C - x$$

したがって一般解は

$$y = x + \frac{1}{C - x} \quad (C \text{ は任意定数})$$