

NO.

0006

リカッチ方程式の一般解（特解 $y_1 = 1/x$ ）

リカッチ方程式は特解 y_1 が 1 つ分かれば、 $y = y_1 + \frac{1}{u}$ の置換により u についての 1 階線形方程式に変換できる。

$y_1 = \frac{1}{x}$ を代入すると、左辺 $= -\frac{1}{x^2}$ 、右辺 $= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$ となり一致するので特解である。

$q_1(x) = -\frac{1}{x}$, $q_2(x) = 1$ であるから、 $y = y_1 + \frac{1}{u}$ の置換により u は

$$\frac{du}{dx} + (q_1 + 2q_2y_1)u = -q_2 \iff \frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = -1$$

を満たす。積分因子は $\mu = x$ であるから

$$\frac{d}{dx}(xu) = -x \implies xu = -\frac{x^2}{2} + \frac{C}{2} \implies u = \frac{C - x^2}{2x}$$

したがって一般解は

$$y = \frac{1}{x} + \frac{2x}{C - x^2} \quad (C \text{ は任意定数})$$