

NO.

0007

リカッチ方程式の一般解（特解 $y_1 = e^x$ ）

リカッチ方程式は特解 y_1 が 1 つ分かれば、 $y = y_1 + \frac{1}{u}$ の置換により u についての 1 階線形方程式に変換できる。

（確認: $y_1 = e^x$ のとき右辺 $= e^{-x}e^{2x} + e^x - e^x = e^x = y_1'$ 。）

$q_1(x) = 1$, $q_2(x) = e^{-x}$ であるから、 $y = e^x + \frac{1}{u}$ の置換により

$$\frac{du}{dx} + (1 + 2e^{-x} \cdot e^x)u = -e^{-x} \iff \frac{du}{dx} + 3u = -e^{-x}$$

積分因子は $\mu = e^{3x}$ であるから

$$\frac{d}{dx}(ue^{3x}) = -e^{2x} \implies ue^{3x} = -\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{C}{2} \implies u = \frac{C - e^{2x}}{2e^{3x}}$$

したがって一般解は

$$y = e^x + \frac{2e^{3x}}{C - e^{2x}} \quad (C \text{ は任意定数})$$