

NO.

0011

一次同次線形偏微分方程式の一般解 ( $xu_x - yu_y = 0$ )

$P(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  の一般解は、特性方程式  $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}$  の解  $\varphi(x, y) = C$  を用いて  $u = F(\varphi(x, y))$  ( $F$  は任意関数) と表せる。

特性方程式は

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y}$$

両辺を積分して  $\ln |x| = -\ln |y| + C_1$ 、すなわち

$$xy = C$$

が特性曲線である。したがって一般解は、任意関数  $F$  を用いて

$$u(x, y) = F(xy)$$

(検算:  $u_x = y F'(xy)$ ,  $u_y = x F'(xy)$  より  $xu_x - yu_y = xy F' - xy F' = 0$ 。)