

NO.

0012

一次同次線形偏微分方程式の一般解 ($yu_x + xu_y = 0$)

$P(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ の一般解は、特性方程式 $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}$ の解 $\varphi(x, y) = C$ を用いて $u = F(\varphi(x, y))$ (F は任意関数) と表せる。

特性方程式は

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \iff x dx = y dy$$

両辺を積分して $\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C_1$ 、すなわち

$$x^2 - y^2 = C$$

が特性曲線である。したがって一般解は、任意関数 F を用いて

$$u(x, y) = F(x^2 - y^2)$$

(検算: $u_x = 2x F'$, $u_y = -2y F'$ より $yu_x + xu_y = 2xy F' - 2xy F' = 0$ 。)