

NO.

0013

一次同次線形偏微分方程式の初期値問題 ($u_x + 2xu_y = 0$ 、 $u(0, y) = \sin y$)

$P(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ の一般解は、特性方程式 $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}$ の解 $\varphi(x, y) = C$ を用いて $u = F(\varphi(x, y))$ (F は任意関数) と表せる。

特性方程式は

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2x} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x$$

積分して $y = x^2 + C$ 、すなわち

$$y - x^2 = C$$

が特性曲線である。したがって一般解は、任意関数 F を用いて

$$u(x, y) = F(y - x^2)$$

条件 $u(0, y) = \sin y$ を課すと $F(y) = \sin y$ と定まるから、求める解は

$$u(x, y) = \sin(y - x^2)$$