

NO.

0014

変数分離形の一般解 ($dy/dx = xy^2$)

変数分離形 $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ は $\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$ として両辺を積分することで解ける。
 $y = 0$ は明らかに解である (特異解)。 $y \neq 0$ のとき変数分離して

$$\frac{dy}{y^2} = x dx$$

両辺を積分すると

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C_1 \implies \frac{1}{y} = -\frac{x^2}{2} - C_1$$

任意定数を $C = 2C_1$ と置き直すと

$$y = \frac{-2}{x^2 + C} \quad (C \text{ は任意定数。ほかに特異解 } y = 0)$$

(検算: $y = \frac{-2}{x^2 + C}$ より $y' = \frac{4x}{(x^2 + C)^2}$ 。一方 $xy^2 = x \cdot \frac{4}{(x^2 + C)^2} = \frac{4x}{(x^2 + C)^2}$ となり両者は一致する。)