

NO.

0016

置換による変数分離形への帰着と初期値問題 ($u = x + y$)

$\frac{dy}{dx} = F(x+y)$ のように右辺が $x+y$ (あるいは $ax+by+c$ 等) のみの関数である場合は、 $u = x+y$ とおくと

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} = 1 + F(u)$$

となり、 u と x の変数分離形に帰着できる。解いた後で $y = u - x$ に戻せばよい。初期条件が与えられている場合は、一般解に代入して任意定数を定める。

$u = x + y$ とおくと $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} = 1 + u^2$ となり、変数分離形に帰着する。

$$\frac{du}{1+u^2} = dx \implies \arctan u = x + C_1 \implies u = \tan(x + C_1)$$

$u = x + y$ に戻すと $y = \tan(x + C_1) - x$ 。初期条件 $y(0) = 0$ より $\tan C_1 = 0$ であるから $C_1 = 0$ ととれる。したがって

$$y = \tan x - x$$

(検算: $y' = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x$ であり、 $(x+y)^2 = (\tan x)^2 = \tan^2 x$ となって一致する。また $y(0) = \tan 0 - 0 = 0$ で初期条件も満たす。)