

NO.

0017

同次形微分方程式の一般解 $((x^2+y^2)/xy$ 型)

$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ の形 (同次形) は $y = vx$ の置換により変数分離形に帰着して解ける。
 右辺を y/x のみで表すと

$$\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{1 + (y/x)^2}{y/x}$$

であるから同次形である。 $v = y/x$ ($y = vx$) と置くと $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$ より

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{v} \implies x \frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{v} - v = \frac{1}{v}$$

変数分離して

$$v dv = \frac{dx}{x} \implies \frac{v^2}{2} = \ln x + C_1 \implies v^2 = 2 \ln x + C$$

$v = y/x$ を戻すと $\frac{y^2}{x^2} = 2 \ln x + C$ より

$$\boxed{y^2 = x^2 (2 \ln x + C)} \quad (C \text{ は任意定数})$$

(検算: $y^2 = x^2(2 \ln x + C)$ の両辺を x で微分すると $2yy' = 2x(2 \ln x + C) + x^2 \cdot \frac{2}{x} = 2x(2 \ln x + C + 1)$ 。よって $y' = \frac{x(2 \ln x + C + 1)}{y}$ 。一方、右辺は $\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2 + x^2(2 \ln x + C)}{xy} = \frac{x(1 + 2 \ln x + C)}{y}$ となり一致する。)