

NO.

0018

同次形微分方程式の一般解 ($y/x + \tan(y/x)$ 型)

$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ の形 (同次形) は $y = vx$ の置換により変数分離形に帰着して解ける。
右辺が y/x のみの関数なので同次形である。 $v = y/x$ ($y = vx$) と置くと

$$v + x \frac{dv}{dx} = v + \tan v \implies x \frac{dv}{dx} = \tan v$$

変数分離して

$$\frac{\cos v}{\sin v} dv = \frac{dx}{x} \implies \ln |\sin v| = \ln x + C_1 \implies \sin v = Cx$$

 $v = y/x$ を戻すと

$$\boxed{\sin \frac{y}{x} = Cx} \quad (C \text{ は任意定数})$$

(検算: $\sin(y/x) = Cx$ の両辺を x で微分すると、 $u = y/x$ において $\cos u \cdot u' = C$ 。 $u' = \frac{y'x - y}{x^2}$ であり、また $C = \frac{\sin u}{x}$ であるから

$$\cos u \cdot \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{\sin u}{x} \implies \cos u (y'x - y) = x \sin u \implies y' = \tan u + \frac{y}{x} = \tan \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$$

となり元の方程式と一致する。)