

NO.

0019

同次形微分方程式の初期値問題 ((x+y)/(x-y) 型)

$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ の形 (同次形) は $y = vx$ の置換により変数分離形に帰着して解ける。
 右辺を y/x のみで表すと

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{1+y/x}{1-y/x}$$

であるから同次形である。 $v = y/x$ ($y = vx$) と置くと

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{1-v} \implies x \frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{1-v} - v = \frac{1+v-v(1-v)}{1-v} = \frac{1+v^2}{1-v}$$

変数分離して

$$\frac{1-v}{1+v^2} dv = \frac{dx}{x}$$

左辺を分解して積分する。

$$\int \frac{1}{1+v^2} dv - \int \frac{v}{1+v^2} dv = \arctan v - \frac{1}{2} \ln(1+v^2)$$

よって

$$\arctan v - \frac{1}{2} \ln(1+v^2) = \ln x + C_1$$

初期条件 $y(1) = 0$ より $x = 1$ のとき $v = y/x = 0$ 。代入すると

$$\arctan 0 - \frac{1}{2} \ln 1 = \ln 1 + C_1 \implies C_1 = 0$$

したがって

$$\arctan v - \frac{1}{2} \ln(1+v^2) = \ln x$$

両辺を 2 倍し $v = y/x$ を戻すと

$$\begin{aligned} 2 \arctan \frac{y}{x} - \ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) &= 2 \ln x \implies 2 \arctan \frac{y}{x} - \ln\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right) = 2 \ln x \\ \implies 2 \arctan \frac{y}{x} - \ln(x^2 + y^2) + 2 \ln x &= 2 \ln x \end{aligned}$$

すなわち

$$\ln(x^2 + y^2) = 2 \arctan \frac{y}{x}$$

(検算: $x = 1, y = 0$ を代入すると左辺 $= \ln 1 = 0$ 、右辺 $= 2 \arctan 0 = 0$ となり初期条件を満たす。また $F(x, y) = \ln(x^2 + y^2) - 2 \arctan(y/x) = 0$ において陰関数の微分公式 $y' = -F_x/F_y$ を用いると、

$$F_x = \frac{2x}{x^2 + y^2} + \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{2(x+y)}{x^2 + y^2}, \quad F_y = \frac{2y}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{2(y-x)}{x^2 + y^2}$$

より $y' = -\frac{2(x+y)/(x^2 + y^2)}{2(y-x)/(x^2 + y^2)} = \frac{x+y}{x-y}$ となり元の方程式と一致する。)