

NO.

0020

一階線形非同次微分方程式の一般解（ $\sin x / x$ 型）

一階線形非同次方程式 $y' + P(x)y = Q(x)$ は、積分因子 $\mu(x) = \exp\left(\int P(x) dx\right)$ を両辺に掛けて $(\mu y)' = \mu Q$ の形に直し、積分することで解ける。

$P(x) = 1/x$ であるから、積分因子は

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{1}{x} dx\right) = \exp(\ln x) = x$$

両辺に $\mu(x) = x$ を掛けると

$$x \frac{dy}{dx} + y = \sin x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dx}(xy) = \sin x$$

両辺を積分して

$$xy = -\cos x + C$$

よって

$$y = \frac{C - \cos x}{x} \quad (C \text{ は任意定数})$$

(検算: $y = (C - \cos x)/x$ を微分すると $y' = \frac{\sin x \cdot x - (C - \cos x)}{x^2} = \frac{\sin x}{x} - \frac{C - \cos x}{x^2} = \frac{\sin x}{x} - \frac{y}{x}$ 。すなわち $y' + y/x = \sin x/x$ が成り立つ。)