

NO.

0021

一階線形非同次微分方程式の一般解 (e^{x^2} 型)

一階線形非同次方程式 $y' + P(x)y = Q(x)$ は、積分因子 $\mu(x) = \exp\left(\int P(x) dx\right)$ を両辺に掛けて $(\mu y)' = \mu Q$ の形に直し、積分することで解ける。

$P(x) = -2x$ であるから、積分因子は

$$\mu(x) = \exp\left(\int (-2x) dx\right) = e^{-x^2}$$

両辺に $\mu(x) = e^{-x^2}$ を掛けると

$$e^{-x^2} \frac{dy}{dx} - 2x e^{-x^2} y = e^{-x^2} e^{x^2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dx}(e^{-x^2} y) = 1$$

両辺を積分して

$$e^{-x^2} y = x + C$$

よって

$$y = (x + C) e^{x^2} \quad (C \text{ は任意定数})$$

(検算: $y = (x + C)e^{x^2}$ を微分すると $y' = e^{x^2} + (x + C) \cdot 2x e^{x^2} = e^{x^2} (1 + 2x^2 + 2xC)$ 。一方 $2xy = 2x(x + C)e^{x^2} = e^{x^2} (2x^2 + 2xC)$ であるから、 $y' - 2xy = e^{x^2} (1 + 2x^2 + 2xC - 2x^2 - 2xC) = e^{x^2}$ が成り立つ。)