

NO.

0022

一階線形非同次微分方程式の初期値問題 ($y' + 2y = e^{-x}$)

一階線形非同次方程式 $y' + P(x)y = Q(x)$ は、積分因子 $\mu(x) = \exp\left(\int P(x) dx\right)$ を両辺に掛けて $(\mu y)' = \mu Q$ の形に直し、積分することで解ける。

$P(x) = 2$ であるから、積分因子は

$$\mu(x) = \exp\left(\int 2 dx\right) = e^{2x}$$

両辺に $\mu(x) = e^{2x}$ を掛けると

$$e^{2x} \frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y = e^{2x}e^{-x} = e^x \iff \frac{d}{dx}(e^{2x}y) = e^x$$

両辺を積分して

$$e^{2x}y = e^x + C \implies y = e^{-x} + Ce^{-2x}$$

初期条件 $y(0) = 3$ より $1 + C = 3$ 、すなわち $C = 2$ 。したがって

$$y = e^{-x} + 2e^{-2x}$$

(検算: $y' = -e^{-x} - 4e^{-2x}$ であり、 $2y = 2e^{-x} + 4e^{-2x}$ であるから、 $y' + 2y = (-e^{-x} - 4e^{-2x}) + (2e^{-x} + 4e^{-2x}) = e^{-x}$ が成り立つ。また $y(0) = 1 + 2 = 3$ も満たす。)