

NO.

0023

完全微分方程式の判定と一般解（多項式係数）

$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ が完全微分方程式であるとは、 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ を満たし、ある関数 $F(x, y)$ が存在して $dF = M dx + N dy$ となることをいう。このとき一般解は $F(x, y) = C$ で与えられる。

$M = 2xy + 3x^2$ 、 $N = x^2 + 2y$ とおくと

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

一致するので完全微分方程式である。 $F_x = M$ より

$$F = \int (2xy + 3x^2) dx = x^2y + x^3 + g(y)$$

$F_y = x^2 + g'(y) = N = x^2 + 2y$ より $g'(y) = 2y$ 、よって $g(y) = y^2$ 。したがって

$$F(x, y) = x^2y + x^3 + y^2$$

一般解は

$$x^2y + x^3 + y^2 = C \quad (C \text{ は任意定数})$$

(検算: $F_x = 2xy + 3x^2 = M$ 、 $F_y = x^2 + 2y = N$ で一致する。)