

NO.

0024

積分因子による完全化と一般解（ $\mu(x)$ の場合）

$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ が完全でない ($M_y \neq N_x$) 場合でも、適当な関数 μ (積分因子) を掛けた $\mu M dx + \mu N dy = 0$ が完全微分方程式になることがある。もし $\frac{M_y - N_x}{N}$ が x のみの関数ならば、 $\mu = \mu(x)$ ととれて

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{M_y - N_x}{N} dx\right)$$

と求まる。積分因子を掛けた後は、通常の完全微分方程式と同様に $F(x, y) = C$ を求めればよい。

$M = 3xy + y^2$ 、 $N = x^2 + xy$ とおくと

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + y$$

一致しないので完全ではない。

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{(3x + 2y) - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{x + y}{x(x + y)} = \frac{1}{x}$$

は x のみの関数だから、 x のみに依存する積分因子が存在し

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{1}{x} dx\right) = e^{\ln x} = x$$

両辺に $\mu(x) = x$ を掛けると

$$(3x^2y + xy^2) dx + (x^3 + x^2y) dy = 0$$

新しい $M^* = 3x^2y + xy^2$ 、 $N^* = x^3 + x^2y$ について

$$\frac{\partial M^*}{\partial y} = 3x^2 + 2xy, \quad \frac{\partial N^*}{\partial x} = 3x^2 + 2xy$$

一致し完全である。 $F_x = M^*$ より

$$F = \int (3x^2y + xy^2) dx = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + g(y)$$

$F_y = x^3 + x^2y + g'(y) = N^* = x^3 + x^2y$ より $g'(y) = 0$ 。よって一般解は

$$x^3y + \frac{x^2y^2}{2} = C \quad (C \text{ は任意定数})$$

(検算: $F_x = 3x^2y + xy^2 = M^*$ 、 $F_y = x^3 + x^2y = N^*$ で一致する。)