

NO.

0025

完全微分方程式の初期値問題（陰関数の陽な解表示）

$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ が完全微分方程式であるとは、 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ を満たし、ある関数 $F(x, y)$ が存在して $dF = M dx + N dy$ となることをいう。このとき一般解は $F(x, y) = C$ で与えられ、初期条件が与えられた場合はこれに代入して C を定める。

$M = 2x + y \cos x$ 、 $N = \sin x - 2y$ とおくと

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \cos x$$

一致するので完全微分方程式である。 $F_x = M$ より

$$F = \int (2x + y \cos x) dx = x^2 + y \sin x + g(y)$$

$F_y = \sin x + g'(y) = N = \sin x - 2y$ より $g'(y) = -2y$ 、よって $g(y) = -y^2$ 。したがって

$$F(x, y) = x^2 + y \sin x - y^2$$

一般解は $x^2 + y \sin x - y^2 = C$ 。初期条件 $y(0) = 3$ ($x = 0$ のとき $\sin 0 = 0$) を代入すると

$$0 + 0 - 9 = C \implies C = -9$$

よって

$$x^2 + y \sin x - y^2 = -9$$

これを y について解くと (y に関する 2 次方程式 $y^2 - (\sin x)y - (x^2 + 9) = 0$ として解の公式を用いる)

$$y = \frac{\sin x \pm \sqrt{\sin^2 x + 4x^2 + 36}}{2}$$

初期条件 $y(0) = 3$ を満たすのは根号の前が $+$ の場合 ($x = 0$ で $y = \frac{0 + \sqrt{36}}{2} = 3$) であるから

$$y = \frac{\sin x + \sqrt{\sin^2 x + 4x^2 + 36}}{2}$$

(検算: $x = 0$ のとき $y = \frac{0 + 6}{2} = 3$ で初期条件を満たす。また $x^2 + y \sin x - y^2 = -9$ に代入すると恒等的に成り立つことが y の定義から確認できる。)