

NO.

0026

クレロー方程式の一般解と特異解 ($y = xy' + (y')^2$)

クレロー方程式 $y = xy' + f(y')$ は $p = y'$ とおいて両辺を x で微分すると $(x + f'(p))\frac{dp}{dx} = 0$ となり、一般解 (直線族) $y = Cx + f(C)$ と、特異解 (p を消去して得られる一般解の包絡線) が得られる。

$p = y'$ とおくと $y = xp + p^2$ 。 $f(p) = p^2$ なので $f'(p) = 2p$ 。両辺を x で微分すると

$$p = p + (x + 2p)\frac{dp}{dx} \implies (x + 2p)\frac{dp}{dx} = 0$$

一般解: $\frac{dp}{dx} = 0$ より $p = C$ 。よって

$$y = Cx + C^2 \quad (C \text{ は任意定数})$$

(検算: $y' = C$ なので $xy' + (y')^2 = xC + C^2 = y$ 。成立。)

特異解: $x + 2p = 0$ より $x = -2p$ 、すなわち $p = -\frac{x}{2}$ 。これを $y = xp + p^2$ に代入すると

$$y = x\left(-\frac{x}{2}\right) + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}$$

$$y = -\frac{x^2}{4}$$

(検算: $y' = -\frac{x}{2}$ であり、 $xy' + (y')^2 = x\left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4} = y$ 。成立。この放物線は一般解の直線族 $y = Cx + C^2$ すべてに接する包絡線になっている。)