

NO.

0027

クレロー方程式の一般解と特異解 ($y = xy' - \ln y'$)

クレロー方程式 $y = xy' + f(y')$ は $p = y'$ とおいて両辺を x で微分すると $(x + f'(p)) \frac{dp}{dx} = 0$ となり、一般解 (直線族) $y = Cx + f(C)$ と、特異解 (p を消去して得られる一般解の包絡線) が得られる。

$p = y' (> 0)$ とおくと $y = xp - \ln p$ 。 $f(p) = -\ln p$ なので $f'(p) = -\frac{1}{p}$ 。両辺を x で微分すると

$$p = p + \left(x - \frac{1}{p}\right) \frac{dp}{dx} \implies \left(x - \frac{1}{p}\right) \frac{dp}{dx} = 0$$

一般解: $\frac{dp}{dx} = 0$ より $p = C (> 0)$ 。よって

$$\boxed{y = Cx - \ln C} \quad (C > 0 \text{ は任意定数})$$

(検算: $y' = C$ なので $xy' - \ln y' = xC - \ln C = y$ 。成立。)

特異解: $x - \frac{1}{p} = 0$ より $x = \frac{1}{p}$ 、すなわち $p = \frac{1}{x} (x > 0)$ 。これを $y = xp - \ln p$ に代入すると

$$y = x \cdot \frac{1}{x} - \ln \frac{1}{x} = 1 + \ln x$$

$$\boxed{y = 1 + \ln x} \quad (x > 0)$$

(検算: $y' = \frac{1}{x}$ であり、 $xy' - \ln y' = x \cdot \frac{1}{x} - \ln \frac{1}{x} = 1 - (-\ln x) = 1 + \ln x = y$ 。成立。)