

NO.

0029

定数係数二階線形同次微分方程式の一般解（相異なる実根）

この方程式は定数係数 2 階線形同次微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ の形であり、 $y = e^{\lambda x}$ を代入すると特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が得られる。相異なる実根 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ （判別式 $D = a^2 - 4b > 0$ ）をもつ場合、 $e^{\lambda_1 x}$ と $e^{\lambda_2 x}$ は互いに一次独立な解となり、一般解は $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ で与えられる。

特性方程式は

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \implies \lambda = 1, 2$$

相異なる実根であるから、一般解は

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

（検算: $y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}$ 、 $y'' = C_1 e^x + 4C_2 e^{2x}$ より $y'' - 3y' + 2y = (1 - 3 + 2)C_1 e^x + (4 - 6 + 2)C_2 e^{2x} = 0$ 。成立。）