

NO.

0030

定数係数二階線形同次微分方程式の一般解（重根）

この方程式は定数係数 2 階線形同次微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ の形であり、特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ （判別式 $D = 0$ ）をもつ場合、 $y_1 = e^{\lambda x}$ だけでは解が 1 つ足りない。 $y_2 = xe^{\lambda x}$ を代入すると

$$y_2'' + ay_2' + by_2 = e^{\lambda x} [x(\lambda^2 + a\lambda + b) + (2\lambda + a)]$$

であり、重根条件 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ かつ $\lambda = -\frac{a}{2}$ より $2\lambda + a = 0$ となるから、右辺は 0 に等しく y_2 も解であることが分かる。 y_1, y_2 は一次独立なので、一般解は $y = (C_1 + C_2x)e^{\lambda x}$ で与えられる。

特性方程式は

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \implies (\lambda + 2)^2 = 0 \implies \lambda = -2 \text{ (重根)}$$

重根であるから、一般解は

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-2x} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

(検算: $y' = (C_2 - 2C_1 - 2C_2x)e^{-2x}$ 、 $y'' = (4C_1 - 4C_2 + 4C_2x)e^{-2x}$ より $y'' + 4y' + 4y = [(4C_1 - 4C_2) + 4(C_2 - 2C_1) + 4C_1]e^{-2x} + [4C_2 - 8C_2 + 4C_2]xe^{-2x} = 0$ 。成立。)