

NO.

0031

定数係数二階線形同次微分方程式の初期値問題（共役虚根）

この方程式は定数係数 2 階線形同次微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ の形であり、特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が共役虚根 $\lambda = p \pm qi$ （判別式 $D < 0$ 、 $q \neq 0$ ）をもつ場合、複素数解 $e^{(p+qi)x} = e^{px}(\cos qx + i \sin qx)$ （オイラーの公式）の実部・虚部 $e^{px} \cos qx$ 、 $e^{px} \sin qx$ がそれぞれ実数値解となり、一次独立である。よって一般解は $y = e^{px}(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx)$ で与えられ、初期値問題ではこれと 1 回微分した式に初期条件を代入して C_1, C_2 を定める。

特性方程式は

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \implies \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm 2i$$

共役虚根 $p = -1$ 、 $q = 2$ であるから、一般解は

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

$y(0) = C_1 = 1$ 。また

$$y' = -e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{-x}(-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x)$$

より $y'(0) = -C_1 + 2C_2 = -1$ 。 $C_1 = 1$ を代入して $2C_2 = 0$ 、 $C_2 = 0$ 。したがって

$$y = e^{-x} \cos 2x$$

(検算: $y' = -e^{-x} \cos 2x - 2e^{-x} \sin 2x$ 、 $y'' = e^{-x} \cos 2x + 2e^{-x} \sin 2x + 2e^{-x} \sin 2x - 4e^{-x} \cos 2x = -3e^{-x} \cos 2x + 4e^{-x} \sin 2x$ 。 よって $y'' + 2y' + 5y = (-3 - 2 + 5)e^{-x} \cos 2x + (4 - 4 + 0)e^{-x} \sin 2x = 0$ 。 また $y(0) = 1$ 、 $y'(0) = -1$ も満たす。成立。)