

NO.

0032

定数係数 2 階線形非同次微分方程式の一般解（非同次項が多項式の場合）

未定係数法を用いて特殊解を求める。定数係数 2 階線形非同次方程式 $y'' + ay' + by = f(x)$ の一般解は、対応する同次方程式の一般解 y_h と、非同次方程式の特殊解 y_p の和

$$y = y_h + y_p$$

で与えられる。特殊解は $f(x)$ の形に応じて多項式・指数関数・三角関数などの仮定形を置き、方程式に代入して未定係数を決定する。ただし仮定した形が同次解と重なる場合（共鳴）は、仮定形に x の適当なべきを掛けて同次解と一次独立にする必要がある。

同次解: 特性方程式 $r^2 - 1 = 0$ より $r = \pm 1$ 。よって

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

特殊解: $f(x) = x^2 + 1$ は 2 次多項式で、同次解に多項式項は含まれないので共鳴なし。 $y_p = Ax^2 + Bx + C$ とおくと $y_p'' = 2A$ より

$$y_p'' - y_p = 2A - (Ax^2 + Bx + C) = -Ax^2 - Bx + (2A - C)$$

これが $x^2 + 1$ に等しいので

$$-A = 1, \quad -B = 0, \quad 2A - C = 1$$

よって $A = -1$, $B = 0$, $C = 2A - 1 = -3$ 。すなわち $y_p = -x^2 - 3$ 。

したがって一般解は

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x^2 - 3 \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

（検算: $y_p'' = -2$ より $y_p'' - y_p = -2 - (-x^2 - 3) = x^2 + 1$ OK）