

NO.

0033

定数係数 2 階線形非同次微分方程式の一般解（非同次項が同次解と共鳴する場合）

未定係数法を用いて特殊解を求める。定数係数 2 階線形非同次方程式 $y'' + ay' + by = f(x)$ の一般解は、対応する同次方程式の一般解 y_h と、非同次方程式の特殊解 y_p の和

$$y = y_h + y_p$$

で与えられる。特殊解は $f(x)$ の形に応じて多項式・指数関数・三角関数などの仮定形を置き、方程式に代入して未定係数を決定する。ただし仮定した形が同次解と重なる場合（共鳴）は、仮定形に x の適当なべきを掛けて同次解と一次独立にする必要がある。

同次解: 特性方程式 $r^2 + 4 = 0$ より $r = \pm 2i$ 。よって

$$y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

特殊解（共鳴あり）: 素朴には $y_p = A \cos 2x + B \sin 2x$ とおきたいが、これは同次解と一次従属（共鳴）であるため、 x 倍した

$$y_p = x(A \cos 2x + B \sin 2x)$$

を仮定する。

$$y_p' = A \cos 2x - 2Ax \sin 2x + B \sin 2x + 2Bx \cos 2x$$

$$y_p'' = -4A \sin 2x - 4Ax \cos 2x + 4B \cos 2x - 4Bx \sin 2x$$

したがって

$$y_p'' + 4y_p = (-4A \sin 2x - 4Ax \cos 2x + 4B \cos 2x - 4Bx \sin 2x) + 4x(A \cos 2x + B \sin 2x) = -4A \sin 2x + 4B \cos 2x$$

（ $x \cos 2x$, $x \sin 2x$ の項は打ち消し合う。）これが $\sin 2x$ に等しいので

$$-4A = 1, \quad 4B = 0 \quad \implies \quad A = -\frac{1}{4}, \quad B = 0$$

よって $y_p = -\frac{x}{4} \cos 2x$ 。

したがって一般解は

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

（検算: 上式に $A = -1/4$, $B = 0$ を代入すると $y_p'' + 4y_p = -4A \sin 2x + 4B \cos 2x = \sin 2x$ OK）