

NO.

0034

定数係数 2 階線形非同次微分方程式の初期値問題（特性方程式が重根で二重に共鳴する場合）

未定係数法を用いて特殊解を求める。定数係数 2 階線形非同次方程式 $y'' + ay' + by = f(x)$ の一般解は、対応する同次方程式の一般解 y_h と、非同次方程式の特殊解 y_p の和

$$y = y_h + y_p$$

で与えられる。特殊解は $f(x)$ の形に応じて多項式・指数関数・三角関数などの仮定形を置き、方程式に代入して未定係数を決定する。ただし仮定した形が同次解と重なる場合（共鳴）は、仮定形に x の適当なべきを掛けて同次解と一次独立にする必要がある。

同次解: 特性方程式 $r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2 = 0$ より重根 $r = 1$ 。よって

$$y_h = (C_1 + C_2 x)e^x$$

特殊解（重根との共鳴）: $f(x) = e^x$ は e^x 型であるが、 e^x は同次解に（重複度 2 で）含まれるため、単純な Ae^x でも Axe^x でも共鳴してしまう。そこで

$$y_p = Ax^2 e^x$$

とおく。

$$y_p' = Ae^x(x^2 + 2x), \quad y_p'' = Ae^x(x^2 + 4x + 2)$$

したがって

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = Ae^x[(x^2 + 4x + 2) - 2(x^2 + 2x) + x^2] = Ae^x \cdot 2 = 2Ae^x$$

これが e^x に等しいので $2A = 1$ 、すなわち $A = \frac{1}{2}$ 。よって $y_p = \frac{1}{2}x^2 e^x$ 。

一般解と初期条件:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x = e^x \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2 \right)$$

$$y' = e^x \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2 \right) + e^x(C_2 + x)$$

$y(0) = C_1 = 1$ 。 $y'(0) = C_1 + C_2 = 0$ より $C_2 = -1$ 。

したがって解は

$$y = \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 \right) e^x$$

（検算: $y' = e^x \cdot \frac{1}{2}x^2$ 、 $y'' = e^x \left(\frac{1}{2}x^2 + x \right)$ より $y'' - 2y' + y = e^x \left[\left(\frac{1}{2}x^2 + x \right) - 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 \right) \right] = e^x \cdot 1 = e^x$ OK。 また $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{1}{2} \cdot 0^2 = 0$ OK)