

NO.

0035

 $y'' + y = \tan x$ の一般解（定数変化法）

右辺 $\tan x$ は未定係数法では扱えない形であるため、対応する同次方程式の基本解 y_1, y_2 を用いた定数変化法（ロンスキアンの利用）により特殊解を求める。すなわち、特殊解を $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ の形で探し、補助条件 $u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0$ のもとで

$$u'_1 = -\frac{y_2 f(x)}{W(x)}, \quad u'_2 = \frac{y_1 f(x)}{W(x)}, \quad W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

を積分して u_1, u_2 を定める。

同次方程式 $y'' + y = 0$ の基本解は $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$ 。ロンスキアンは

$$W = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

よって

$$u'_1 = -y_2 \tan x = -\sin x \tan x = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = -\sec x + \cos x, \quad u'_2 = y_1 \tan x = \cos x \tan x = \sin x$$

積分して

$$u_1 = -\ln |\sec x + \tan x| + \sin x, \quad u_2 = -\cos x$$

（積分定数は 0 ととる。）特殊解は

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = (\sin x - \ln |\sec x + \tan x|) \cos x + (-\cos x) \sin x = -\cos x \ln |\sec x + \tan x|$$

したがって一般解は

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln |\sec x + \tan x| \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

（検算: $h(x) = \ln |\sec x + \tan x|$ とおくと $h'(x) = \sec x$ であるから、 $y_p = -\cos x h(x)$ より $y'_p = \sin x h - 1$ 、 $y''_p = \cos x h + \tan x$ 。よって $y''_p + y_p = \tan x$ が成り立つ。）