

NO.

0036

 $y'' + y = 1/\cos x$ の一般解（定数変化法）

右辺 $1/\cos x$ は未定係数法では扱えない形であるため、対応する同次方程式の基本解 y_1, y_2 を用いた定数変化法（ロンスキアンの利用）により特殊解を求める。すなわち、特殊解を $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ の形で探し、補助条件 $u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0$ のもとで

$$u'_1 = -\frac{y_2 f(x)}{W(x)}, \quad u'_2 = \frac{y_1 f(x)}{W(x)}, \quad W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

を積分して u_1, u_2 を定める。

同次方程式の基本解・ロンスキアンは $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x, W = 1$ （前問と共通）。 $f(x) = \sec x$ より

$$u'_1 = -y_2 \sec x = -\sin x \sec x = -\tan x, \quad u'_2 = y_1 \sec x = \cos x \sec x = 1$$

積分して

$$u_1 = \ln |\cos x| = \ln(\cos x), \quad u_2 = x$$

（この区間では $\cos x > 0$ 。）特殊解は

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = \cos x \ln(\cos x) + x \sin x$$

したがって一般解は

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln(\cos x) + x \sin x \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

（検算: $y'_p = -\sin x \ln(\cos x) + x \cos x, y''_p = -\cos x \ln(\cos x) + \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x - x \sin x$ より $y''_p + y_p = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$ が成り立つ。）