

NO.

0037

 $y'' - 2y' + y = e^x/x$ の初期値問題 (定数変化法)

右辺 e^x/x は未定係数法では扱えない形であるため、対応する同次方程式の基本解 y_1, y_2 を用いた定数変化法 (ロンスキアンの利用) により特殊解を求める。すなわち、特殊解を $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ の形で探し、補助条件 $u'_1y_1 + u'_2y_2 = 0$ のもとで

$$u'_1 = -\frac{y_2 f(x)}{W(x)}, \quad u'_2 = \frac{y_1 f(x)}{W(x)}, \quad W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

を積分して u_1, u_2 を定める。

特性方程式 $(r-1)^2 = 0$ より重解 $r = 1$ で、同次方程式の基本解は $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$ 。ロンスキアンは

$$W = y_1y'_2 - y_2y'_1 = e^x(e^x + xe^x) - xe^x \cdot e^x = e^{2x}$$

$f(x) = \frac{e^x}{x}$ より

$$u'_1 = -\frac{y_2 f}{W} = -\frac{xe^x \cdot \frac{e^x}{x}}{e^{2x}} = -1, \quad u'_2 = \frac{y_1 f}{W} = \frac{e^x \cdot \frac{e^x}{x}}{e^{2x}} = \frac{1}{x}$$

積分して $u_1 = -x$, $u_2 = \ln x$ ($x > 0$)。特殊解は

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 = -xe^x + xe^x \ln x$$

ここで $-xe^x$ は同次解 $y_2 = xe^x$ の定数倍なので任意定数に吸収でき、一般解は

$$y = Ae^x + Bxe^x + xe^x \ln x = e^x (A + Bx + x \ln x)$$

とおける。初期条件を適用する。 $y(1) = e(A + B) = e$ より $A + B = 1$ 。また

$$y' = e^x(A + Bx + x \ln x) + e^x(B + \ln x + 1)$$

なので、 $x = 1$ を代入すると $y'(1) = e[(A + B) + (B + 1)] = e(A + 2B + 1) = e$ より $A + 2B = 0$ 。連立して解くと $A + B = 1$, $A + 2B = 0$ より $B = -1$, $A = 2$ 。したがって

$$y = e^x (2 - x + x \ln x) \quad (x > 0)$$

(検算: $g(x) = 2 - x + x \ln x$ とおくと $g'(x) = \ln x$ 。 $y = e^x g$ より $y' = e^x(g + \ln x)$, $y'' = e^x \left(g + 2 \ln x + \frac{1}{x}\right)$ 。よって

$$y'' - 2y' + y = e^x \left[\left(g + 2 \ln x + \frac{1}{x}\right) - 2(g + \ln x) + g\right] = e^x \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^x}{x}$$

が成り立つ。また $y(1) = e(2 - 1 + 0) = e$, $y'(1) = e(g(1) + \ln 1) = e(1 + 0) = e$ となり初期条件も満たす。)