

NO.

0038

オイラー方程式（コーシー・オイラー方程式）の一般解（異なる実根の場合）

オイラー方程式（コーシー・オイラー方程式） $x^2y'' + axy' + by = f(x)$ は $x = e^t$ ($x > 0$) と置換すると定数係数線形微分方程式に帰着できる。また、同次形 $x^2y'' + axy' + by = 0$ には $y = x^m$ を直接代入してもよく、 $x^m [m(m-1) + am + b] = 0$ より特性方程式 $m(m-1) + am + b = 0$ が得られる。

特性方程式は

$$m(m-1) - 2m + 2 = 0 \implies m^2 - 3m + 2 = 0 \implies (m-1)(m-2) = 0$$

より $m = 1, 2$ （異なる実根）。よって一般解は

$$y = C_1x + C_2x^2 \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

（検算: $y = x$ のとき $y' = 1$, $y'' = 0$ で $x^2 \cdot 0 - 2x \cdot 1 + 2x = 0$ 。 $y = x^2$ のとき $y' = 2x$, $y'' = 2$ で $x^2 \cdot 2 - 2x \cdot 2x + 2x^2 = 2x^2 - 4x^2 + 2x^2 = 0$ 。ともに成立。）