

NO.

0039

オイラー方程式（コーシー・オイラー方程式）の一般解（共役複素根の場合）

オイラー方程式（コーシー・オイラー方程式） $x^2y'' + axy' + by = f(x)$ は $x = e^t$ ($x > 0$) と置換すると定数係数線形微分方程式に帰着できる。また、同次形 $x^2y'' + axy' + by = 0$ には $y = x^m$ を直接代入してもよく、特性方程式 $m(m-1) + am + b = 0$ が共役複素根 $m = \alpha \pm i\beta$ をもつ場合、 $x^{i\beta} = e^{i\beta \ln x} = \cos(\beta \ln x) + i \sin(\beta \ln x)$ であることから一般解は $y = x^\alpha (C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \sin(\beta \ln x))$ と表される。

特性方程式は

$$m(m-1) + m + 1 = 0 \implies m^2 + 1 = 0 \implies m = \pm i$$

共役複素根 $\alpha = 0, \beta = 1$ であるから、一般解は

$$y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

(検算: $y = \cos(\ln x)$ のとき $y' = -\frac{\sin(\ln x)}{x}$, $y'' = \frac{-\cos(\ln x) + \sin(\ln x)}{x^2}$ より $x^2y'' + xy' + y = [-\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] - \sin(\ln x) + \cos(\ln x) = 0$ となり成立。 $\sin(\ln x)$ についても同様に成立することが確かめられる。)