

NO.

0040

非同次オイラー方程式（コーシー・オイラー方程式）の初期値問題（重根・非同次項 $\ln x$ ）

オイラー方程式（コーシー・オイラー方程式） $x^2 y'' + ax y' + by = f(x)$ は $x = e^t$ ($x > 0$) と置換すると定数係数線形微分方程式に帰着できる。 $t = \ln x$ とすると $x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$ 、 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$ であるから、 $D = \frac{d}{dt}$ と略記すると方程式は $\frac{d^2 y}{dt^2} + (a-1) \frac{dy}{dt} + by = f(e^t)$ という t に関する定数係数線形微分方程式になる。

$t = \ln x$ とおくと、上記の変換により

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} + y = t$$

となる ($a = -1$, $b = 1$ より $a-1 = -2$ 、右辺は $f(e^t) = \ln(e^t) = t$)。

まず斉次方程式の特性方程式は $m^2 - 2m + 1 = 0$ より $(m-1)^2 = 0$ 、重根 $m = 1$ 。よって

$$y_h = (C_1 + C_2 t) e^t$$

次に特解を $y_p = At + B$ ($t = 0, 1$ は特性方程式の根でないので多項式のまま仮定できる) とおくと、 $y_p' = A$, $y_p'' = 0$ であるから

$$0 - 2A + (At + B) = t \implies At + (B - 2A) = t$$

係数比較により $A = 1$, $B = 2A = 2$ 。よって $y_p = t + 2$ 。

したがって t に関する一般解は $y = (C_1 + C_2 t) e^t + t + 2$ 。 $t = \ln x$, $e^t = x$ を代入して x に戻すと

$$y = C_1 x + C_2 x \ln x + \ln x + 2$$

初期条件を適用する。 $y' = C_1 + C_2(\ln x + 1) + \frac{1}{x}$ である。

$x = 1$ ($\ln 1 = 0$) で

$$y(1) = C_1 + 2 = 1 \implies C_1 = -1$$

$$y'(1) = C_1 + C_2 + 1 = 0 \implies -1 + C_2 + 1 = 0 \implies C_2 = 0$$

よって

$$y = 2 - x + \ln x$$

(検算: $y' = -1 + \frac{1}{x}$, $y'' = -\frac{1}{x^2}$ より $x^2 y'' - x y' + y = -1 - x \left(-1 + \frac{1}{x} \right) + (2 - x + \ln x) = -1 + x - 1 + 2 - x + \ln x = \ln x$ で方程式を満たす。また $y(1) = 2 - 1 + 0 = 1$, $y'(1) = -1 + 1 = 0$ で初期条件も満たす。)