

NO.

0041

階数低下法による 2 階微分方程式 $xy'' = y'$ の一般解

この方程式は y を含まない型 $F(x, y', y'') = 0$ であり、 $p = y'$ とおくと $p' = y''$ となって、 p に関する 1 階の方程式に帰着できる。

$p = y'$ とおくと $p' = y''$ であるから

$$x p' = p$$

$p \neq 0$ のとき変数分離して

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \implies \ln |p| = \ln |x| + C_1 \implies p = C'_1 x$$

($p \equiv 0$ すなわち y が定数の場合も $C'_1 = 0$ として含まれる。) よって $y' = C'_1 x$ であるから、積分して

$$y = \frac{C'_1}{2} x^2 + C_2$$

定数を $A = \frac{C'_1}{2}$ とおき直せば

$$y = A x^2 + B \quad (A, B \text{ は任意定数})$$

(検算: $y' = 2Ax$, $y'' = 2A$ より $x y'' = 2Ax = y'$ 。成立。)