

NO.

0042

階数低下法による初期値問題 $yy'' = (y')^2$ の求解

この方程式は x を含まない型 $F(y, y', y'') = 0$ であり、 $p = y'$ とおき y を独立変数とみなすと $y'' = p \frac{dp}{dy}$ となって、 p と y に関する 1 階の方程式に帰着できる。

$p = y', y'' = p \frac{dp}{dy}$ とおくと

$$y p \frac{dp}{dy} = p^2$$

$p \neq 0$ ($y'(0) = 2 \neq 0$ よりこの範囲で妥当) のとき両辺を p で割って

$$y \frac{dp}{dy} = p \implies \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \implies \ln |p| = \ln |y| + C_1 \implies p = C'_1 y$$

すなわち $\frac{dy}{dx} = C'_1 y$ 。再び変数分離して

$$\frac{dy}{y} = C'_1 dx \implies y = C_2 e^{C'_1 x}$$

初期条件 $y(0) = 1$ より $C_2 = 1$ 。また $y' = C'_1 C_2 e^{C'_1 x}$ に $x = 0$ を代入して $y'(0) = C'_1 C_2 = C'_1 = 2$ 。よって

$$y = e^{2x}$$

(検算: $y' = 2e^{2x}$, $y'' = 4e^{2x}$ より $yy'' = e^{2x} \cdot 4e^{2x} = 4e^{4x} = (2e^{2x})^2 = (y')^2$ 。また $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ も満たす。成立。)