

NO.

0043

既知の1解 $y_1 = x$ を用いた階数低下法による第2解の導出

2階線形同次方程式 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ の1つの解 y_1 ($y_1 \neq 0$) が既知のとき、 $y = y_1(x)v(x)$ とおいて代入すると、 y_1 が解であることから v を含まない項が消え、 v に関する方程式は v'' と v' のみを含む形になる。すなわち $w = v'$ とおけば w に関する1階線形方程式に帰着し、階数が1つ下がる。

$y_1 = x$ が解であることは、 $y'_1 = 1, y''_1 = 0$ を代入して $x^2 \cdot 0 - 2x \cdot 1 + 2x = -2x + 2x = 0$ より確認できる。

$y = xv(x)$ とおくと

$$y' = v + xv', \quad y'' = 2v' + xv''$$

これを方程式に代入すると

$$x^2(2v' + xv'') - 2x(v + xv') + 2xv = 0$$

$$2x^2v' + x^3v'' - 2xv - 2x^2v' + 2xv = 0$$

$-2x^2v'$ と $2x^2v'$ が打ち消し合い、 $-2xv$ と $2xv$ も打ち消し合うので

$$x^3v'' = 0 \implies v'' = 0 \quad (x \neq 0)$$

よって $v' = C_1$ 、積分して $v = C_1x + C_2$ 。したがって

$$y = xv = C_1x^2 + C_2x$$

$y_1 = x$ に対応する項 C_2x を除いた $y_2 = x^2$ が第2の解であり、一般解は

$$y = C_1x^2 + C_2x \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

(検算: $y_2 = x^2$ について $y'_2 = 2x, y''_2 = 2$ より $x^2 \cdot 2 - 2x \cdot 2x + 2x^2 = 2x^2 - 4x^2 + 2x^2 = 0$ 。成立。 $y_1 = x$ と $y_2 = x^2$ はロンスキアン $W = x \cdot 2x - 1 \cdot x^2 = x^2 \neq 0$ ($x \neq 0$) より1次独立。)