

NO.

0044

連立線形微分方程式の一般解（相異なる実固有値の場合）

この連立方程式は $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の形であり、係数行列 A の固有値・固有ベクトルを求め、それらを用いて一般解を構成する。

係数行列は $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 。特性方程式は

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

より固有値は $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ 。

$\lambda_1 = 3$ に対して $(1 - 3)x + 2y = 0 \Rightarrow x = y$ より固有ベクトル $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

$\lambda_2 = -1$ に対して $(1 + 1)x + 2y = 0 \Rightarrow x = -y$ より固有ベクトル $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 。

相異なる実固有値なので、一般解は $\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}$ と $\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$ の線形結合として

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}, \quad y(t) = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

（検算: $x' = 3C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}$ に対し $x + 2y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + 2C_1 e^{3t} - 2C_2 e^{-t} = 3C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} = x'$ 。また $y' = 3C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$ に対し $2x + y = 2C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{-t} + C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} = 3C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} = y'$ 。いずれも一致するので正しい。）