

NO.

0045

連立線形微分方程式の一般解（複素固有値の場合）

この連立方程式は $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の形であり、係数行列 A の固有値・固有ベクトルを求め、それらを用いて一般解を構成する。

係数行列は $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 。特性方程式は

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

より固有値は $\lambda = 1 \pm i$ 。

$\lambda = 1 + i$ に対して $(1 - (1 + i))x - y = 0 \Rightarrow -ix - y = 0 \Rightarrow y = -ix$ より固有ベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ 。

複素解 $\mathbf{v} e^{(1+i)t} = e^t(\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ の実部・虚部を成分ごとに計算すると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + i e^t \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

したがって実部 $e^t(\cos t, \sin t)$ と虚部 $e^t(\sin t, -\cos t)$ はそれぞれ実数解であり、一般解は両者の線形結合として

$$x(t) = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \quad y(t) = e^t(C_1 \sin t - C_2 \cos t) \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

（検算: $x' = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^t(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) = e^t[(C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t]$ 。一方 $x - y = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t) - e^t(C_1 \sin t - C_2 \cos t) = e^t[(C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t]$ で一致。 $y' = e^t(C_1 \sin t - C_2 \cos t) + e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t) = e^t[(C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \sin t]$ 。一方 $x + y = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^t(C_1 \sin t - C_2 \cos t) = e^t[(C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \sin t]$ で一致。 よって正しい。）