

NO.

0048

デルタ関数を外力とする初期値問題のラプラス変換による解法

ディラックのデルタ関数 $\delta(t-a)$ ($a > 0$) は $\mathcal{L}[\delta(t-a)](s) = e^{-as}$ を満たし、 $y'' + \omega^2 y = \delta(t-a)$ のように用いると外力は $t = a$ で y' に大きさ 1 の飛び（ジャンプ）を与える瞬間的な衝撃として作用する。また単位階段関数 $u(t-a)$ ($t < a$ で 0、 $t \geq a$ で 1) については第二移動定理 $\mathcal{L}[u(t-a)f(t-a)](s) = e^{-as}F(s)$ が成り立つ。両辺をラプラス変換すると

$$s^2 Y(s) + Y(s) = e^{-\pi s} \implies Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right] = \sin t$ であるから、第二移動定理より

$$y(t) = u(t-\pi) \sin(t-\pi)$$

$\sin(t-\pi) = -\sin t$ であるから、 $t < \pi$ では $y(t) = 0$ 、 $t \geq \pi$ では $y(t) = -\sin t$ である。まとめて

$$y(t) = u(t-\pi) \sin(t-\pi) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < \pi) \\ -\sin t & (t \geq \pi) \end{cases}$$

検算: $t \neq \pi$ では $y'' + y = 0$ を満たす ($\sin$ は同次方程式の解)。 y は $t = \pi$ で連続 ($y(\pi^-) = 0$ 、 $y(\pi^+) = -\sin \pi = 0$)。 $y'(t) = -\cos t$ ($t > \pi$) より $y'(\pi^+) = -\cos \pi = 1$ 、一方 $y'(\pi^-) = 0$ であるから y' は $t = \pi$ で大きさ 1 の飛びを持ち、これは $\delta(t-\pi)$ の係数 1 と一致する。