

NO.

0050

エアリー方程式のべき級数解と係数の漸化式

2 階線形常微分方程式 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ において $x = 0$ が正則点 (P, Q が $x = 0$ で正則) であるとき、解は $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の形の収束べき級数として存在する。これを方程式に代入し、各べき x^m の係数を 0 とおくことで係数 a_n の間の漸化式が得られ、 a_0, a_1 は任意定数として自由を選べる。

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ より}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n, \quad xy = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} x^m$$

$y'' - xy = 0$ の x^m の係数を比較すると、 $m = 0$ のとき

$$2 \cdot 1 \cdot a_2 = 0 \implies a_2 = 0$$

$m \geq 1$ のとき

$$(m+2)(m+1)a_{m+2} = a_{m-1} \implies a_{m+2} = \frac{a_{m-1}}{(m+1)(m+2)} \quad (m \geq 1)$$

これが漸化式である。これを用いて逐次計算する。

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{a_0}{3 \cdot 2} = \frac{a_0}{6}, & a_4 &= \frac{a_1}{4 \cdot 3} = \frac{a_1}{12}, & a_5 &= \frac{a_2}{5 \cdot 4} = 0 \\ a_6 &= \frac{a_3}{6 \cdot 5} = \frac{a_0}{6 \cdot 30} = \frac{a_0}{180}, & a_7 &= \frac{a_4}{7 \cdot 6} = \frac{a_1}{12 \cdot 42} = \frac{a_1}{504} \end{aligned}$$

よって

$$a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{a_0}{6}, \quad a_4 = \frac{a_1}{12}, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = \frac{a_0}{180}, \quad a_7 = \frac{a_1}{504}$$

(検算: 例えば a_6 は漸化式で $m = 4$ を用いて $a_6 = a_3/(5 \cdot 6) = (a_0/6)/30 = a_0/180$ となり一致する。)