

NO.

0051

ルジャンドル方程式 ($n = 2$) の多項式解とルジャンドル多項式 $P_2(x)$

$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$ に $y = \sum a_k x^k$ を代入すると

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k - \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k + n(n+1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

$((1 - x^2)y''$ の x^2y'' 部分は添字をずらさずそのまま $k(k-1)a_k x^k$ となることに注意)。 x^k の係数をまとめると

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} = [k(k-1) + 2k - n(n+1)]a_k = [k(k+1) - n(n+1)]a_k$$

すなわち

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - n(n+1)}{(k+1)(k+2)} a_k$$

が一般の漸化式である。ここに $n = 2$ ($n(n+1) = 6$) を代入すると

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - 6}{(k+1)(k+2)} a_k$$

$a_1 = 0$ とすると奇数次の係数はすべて 0 ($a_3 = a_5 = \dots = 0$)。偶数次は

$$k = 0: \quad a_2 = \frac{0 - 6}{1 \cdot 2} a_0 = -3a_0$$

$$k = 2: \quad a_4 = \frac{2 \cdot 3 - 6}{3 \cdot 4} a_2 = \frac{0}{12} a_2 = 0$$

以降 $a_6 = a_8 = \dots = 0$ も同様に 0 となるから、級数は a_0, a_2 の 2 項で止まり

$$y = a_0 + a_2 x^2 = a_0 (1 - 3x^2)$$

これが求める多項式解である。 $x = 1$ で値 1 をとるように定数 a_0 を定めると

$$a_0(1 - 3) = 1 \quad \implies \quad a_0 = -\frac{1}{2}$$

よって

$$P_2(x) = -\frac{1}{2} (1 - 3x^2) = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

(検算: $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y$ に $y = \frac{3x^2-1}{2}$ を代入すると、 $y' = 3x$, $y'' = 3$ より $(1 - x^2) \cdot 3 - 2x \cdot 3x + 6 \cdot \frac{3x^2-1}{2} = 3 - 3x^2 - 6x^2 + 9x^2 - 3 = 0$ となり方程式を満たす。また $P_2(1) = \frac{3-1}{2} = 1$ で正規化条件も満たす。)