

NO.

0052

エルミート方程式 (n=2) の初期値問題の多項式解

$y'' - 2xy' + 2ny = 0$ に $y = \sum a_k x^k$ を代入すると

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k + 2n \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

より

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} = (2k-2n)a_k \implies a_{k+2} = \frac{2(k-n)}{(k+1)(k+2)} a_k$$

が一般の漸化式である。 $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ とおくと $a_0 = y(0) = -2$, $a_1 = y'(0) = 0$ である。ここに $n = 2$ を代入すると

$$a_{k+2} = \frac{2(k-2)}{(k+1)(k+2)} a_k$$

$a_1 = 0$ より奇数次の係数はすべて 0。偶数次は

$$k=0: \quad a_2 = \frac{2(0-2)}{1 \cdot 2} a_0 = \frac{-4}{2} a_0 = -2a_0 = -2 \cdot (-2) = 4$$

$$k=2: \quad a_4 = \frac{2(2-2)}{3 \cdot 4} a_2 = \frac{0}{12} a_2 = 0$$

以降 $a_6 = a_8 = \dots = 0$ となるから級数は有限項で終わり、多項式解

$$y = a_0 + a_2 x^2 = -2 + 4x^2$$

が得られる。よって

$$y = 4x^2 - 2$$

(検算: $y' = 8x$, $y'' = 8$ より $y'' - 2xy' + 4y = 8 - 2x \cdot 8x + 4(4x^2 - 2) = 8 - 16x^2 + 16x^2 - 8 = 0$ となり方程式を満たす。また $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$ も満たしている。なお $y = 4x^2 - 2$ はエルミート多項式 $H_2(x) = 4x^2 - 2$ に一致する。)