

NO.

0053

スツルム・リウヴィル型境界値問題（ディリクレ境界条件） の固有値・固有関数

方針: λ の符号 ($\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$) によって特性方程式の解の形が変わるため、場合分けして各場合に境界条件を課し、自明でない解が存在するかを調べる。

(i) $\lambda < 0$ ($\lambda = -\mu^2$, $\mu > 0$) のとき。

一般解は

$$y = A \cosh(\mu x) + B \sinh(\mu x)$$

境界条件を課すと

$$y(0) = A = 0$$

$$y(L) = B \sinh(\mu L) = 0$$

$\mu L > 0$ より $\sinh(\mu L) \neq 0$ であるから $B = 0$ 。したがって自明解のみで、固有値は存在しない。

(ii) $\lambda = 0$ のとき。

一般解は

$$y = A + Bx$$

境界条件を課すと

$$y(0) = A = 0$$

$$y(L) = BL = 0$$

$L > 0$ より $B = 0$ 。自明解のみで、 $\lambda = 0$ は固有値ではない。

(iii) $\lambda > 0$ ($\lambda = \mu^2$, $\mu > 0$) のとき。

一般解は

$$y = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x)$$

境界条件を課すと

$$y(0) = A = 0$$

$$y(L) = B \sin(\mu L) = 0$$

自明でない解 ($B \neq 0$) が存在するためには

$$\sin(\mu L) = 0 \implies \mu L = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

($n = 0$ は $\mu = 0$ となり $\lambda > 0$ の仮定に反するので除く。負の n は符号を B に吸収できるので $n \geq 1$ でよい。) よって

$$\mu_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \lambda_n = \mu_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

対応する固有関数は $y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ (定数倍を除く)。

(検算: $y_n'' = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = -\lambda_n y_n$ より $y_n'' + \lambda_n y_n = 0$ を満たす。また $y_n(0) = \sin 0 = 0$, $y_n(L) = \sin(n\pi) = 0$ も満たす。)

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$