

NO.

0054

スツルム・リウヴィル型境界値問題（ノイマン境界条件） の固有値・固有関数

方針: λ の符号 ($\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$) によって特性方程式の解の形が変わるため、場合分けして各場合に境界条件を課し、自明でない解が存在するかを調べる。

(i) $\lambda < 0$ ($\lambda = -\mu^2$, $\mu > 0$) のとき。

一般解とその導関数は

$$y = A \cosh(\mu x) + B \sinh(\mu x), \quad y' = A\mu \sinh(\mu x) + B\mu \cosh(\mu x)$$

境界条件を課すと

$$y'(0) = B\mu = 0$$

$$y'(L) = A\mu \sinh(\mu L) = 0$$

$\mu > 0$ より $B = 0$ 、 $\sinh(\mu L) \neq 0$ より $A = 0$ 。自明解のみで、固有値は存在しない。

(ii) $\lambda = 0$ のとき。

一般解とその導関数は

$$y = A + Bx, \quad y' = B$$

境界条件を課すと

$$y'(0) = B = 0$$

$$y'(L) = B = 0$$

$B = 0$ とすれば両条件が満たされ、 A は任意でよい。 $y = A$ (定数) は自明でない解を与える。したがって $\lambda_0 = 0$ は固有値であり、対応する固有関数は定数関数 $y_0(x) = 1$ 。

(iii) $\lambda > 0$ ($\lambda = \mu^2$, $\mu > 0$) のとき。

一般解とその導関数は

$$y = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x), \quad y' = -A\mu \sin(\mu x) + B\mu \cos(\mu x)$$

境界条件を課すと

$$y'(0) = B\mu = 0$$

$$y'(L) = -A\mu \sin(\mu L) = 0$$

$\mu > 0$ より $B = 0$ 。自明でない解 ($A \neq 0$) が存在するためには

$$\sin(\mu L) = 0 \implies \mu_n = \frac{n\pi}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

よって $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ 、固有関数は $y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ 。

(検算: $y'_n = -\frac{n\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ より $y'_n(0) = 0$ 、 $y'_n(L) = -\frac{n\pi}{L} \sin(n\pi) = 0$ を満たす。 $y''_n + \lambda_n y_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0$ も成立。)

$n = 0$ ($\lambda_0 = 0, y_0 = 1$) の場合も同じ式 $y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ に含まれるので、まとめて記す。

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$