

NO.

0055

スツルム・リウヴィル型境界値問題（混合境界条件）の固有値・固有関数

方針: λ の符号 ($\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$) によって特性方程式の解の形が変わるため、場合分けして各場合に境界条件を課し、自明でない解が存在するかを調べる。

(i) $\lambda < 0$ ($\lambda = -\mu^2$, $\mu > 0$) のとき。

一般解は

$$y = A \cosh(\mu x) + B \sinh(\mu x)$$

境界条件を課すと

$$y(0) = A = 0$$

$$y'(L) = B\mu \cosh(\mu L) = 0$$

$\cosh(\mu L) \geq 1 > 0$ より $B = 0$ 。自明解のみで、固有値は存在しない。

(ii) $\lambda = 0$ のとき。

一般解とその導関数は

$$y = A + Bx, \quad y' = B$$

境界条件を課すと

$$y(0) = A = 0$$

$$y'(L) = B = 0$$

よって $A = B = 0$ で自明解のみ。 $\lambda = 0$ は固有値ではない。

(iii) $\lambda > 0$ ($\lambda = \mu^2$, $\mu > 0$) のとき。

一般解は

$$y = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x)$$

境界条件を課すと

$$y(0) = A = 0$$

$$y'(L) = B\mu \cos(\mu L) = 0$$

自明でない解 ($B \neq 0$) が存在するためには

$$\cos(\mu L) = 0 \implies \mu L = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{(2n+1)\pi}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

よって

$$\mu_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}, \quad \lambda_n = \mu_n^2 = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2L} \right)^2$$

固有関数は $y_n(x) = \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right)$ (定数倍を除く)。

(検算: $y_n(0) = \sin 0 = 0$ 。 $y'_n(x) = \frac{(2n+1)\pi}{2L} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right)$ より $y'_n(L) = \frac{(2n+1)\pi}{2L} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = 0$ ($\cos$ の引数が $\pi/2$ の奇数倍のため)。また $y''_n + \lambda_n y_n = -\mu_n^2 y_n + \mu_n^2 y_n = 0$ も満たす。)

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2L} \right)^2, \quad y_n(x) = \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$