

NO.

0056

## ラグランジュの補助方程式による 1 階線形偏微分方程式の一般解 ( $xu_x + yu_y = u$ )

$Pu_x + Qu_y = R$  の形の方程式は、ラグランジュの補助方程式  $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{R}$  から独立な 2 つの第一積分  $\varphi(x, y, u) = c_1, \psi(x, y, u) = c_2$  を求め、一般解を  $F(\varphi, \psi) = 0$  (または  $\varphi = f(\psi)$ ) の形で表す方針で解く。

補助方程式は

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u}$$

最初の 2 式  $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$  を積分すると

$$\ln x = \ln y + c'_1 \implies \varphi = \frac{x}{y} = c_1$$

次に  $\frac{dx}{x} = \frac{du}{u}$  を積分すると

$$\ln x = \ln u + c'_2 \implies \psi = \frac{x}{u} = c_2$$

よって一般解は  $\psi = f(\varphi)$ 、すなわち  $\frac{x}{u} = f\left(\frac{x}{y}\right)$  の形になる。これを  $u$  について解き、 $h(t) = 1/f(1/t)$  とおいて整理すると

$$u = x \varphi_0\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\varphi_0 \text{ は任意関数})$$

(検算)  $u = x \varphi_0(y/x)$  とおくと

$$u_x = \varphi_0\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} \varphi'_0\left(\frac{y}{x}\right), \quad u_y = \varphi'_0\left(\frac{y}{x}\right)$$

であるから

$$xu_x + yu_y = x\varphi_0 - y\varphi'_0 + y\varphi'_0 = x\varphi_0\left(\frac{y}{x}\right) = u$$

となり、方程式を満たす。