

NO.

0057

ラグランジュの補助方程式による 1 階線形偏微分方程式の一般解 ($u_x + u_y = u$)

$P u_x + Q u_y = R$ の形の方程式は、ラグランジュの補助方程式 $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{R}$ から独立な 2 つの第一積分 $\varphi(x, y, u) = c_1, \psi(x, y, u) = c_2$ を求め、一般解を $F(\varphi, \psi) = 0$ (または $\varphi = f(\psi)$) の形で表す方針で解く。

補助方程式は

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{u}$$

最初の 2 式 $dx = dy$ を積分すると

$$\varphi = x - y = c_1$$

次に $dx = \frac{du}{u}$ を積分すると

$$x = \ln u + c'_2 \implies \psi = u e^{-x} = c_2$$

よって一般解は $\psi = f(\varphi)$ 、すなわち

$$u = e^x f(x - y) \quad (f \text{ は任意関数})$$

(検算) $u = e^x f(x - y)$ とおくと

$$u_x = e^x f(x - y) + e^x f'(x - y), \quad u_y = -e^x f'(x - y)$$

であるから

$$u_x + u_y = e^x f(x - y) + e^x f'(x - y) - e^x f'(x - y) = e^x f(x - y) = u$$

となり、方程式を満たす。